

3.5 Інтегрований метод найменших квадратів як ефективний засіб параметричного оцінювання у реальних умовах

Існують строго математичні сформульовані методи статистичного оптимального оцінювання параметрів математичних моделей досліджуваних процесів (об'єктів). За надто великих (статистично представницьких) вибірок даних експерименту і відомих законів розподілу випадкових складових процесу вони є оптимальними [215]. Однак, реальність, пов'язана із властивостями реальних об'єктів (обмеженість вибірок та недостатня їх інформативність), висока чутливість оптимальних методів до неточності статистичних характеристик сигналів і шумів, призводить до відірваності оптимальних методів від реальності. Отже, є необхідність у розробці таких методів ідентифікації, які в реальних умовах давали б результат близький до оптимальних в ідеальних умовах. Інтегрований метод найменших квадратів (ІМНК) є саме таким засобом.

Сучасні інформаційно -вимірювальні комп'ютеризовані системи мають високошвидкісні, достатньо точні первинні перетворювачі фізичних величин у цифрові електричні сигнали з часовою дискретизацією, яка набагато перевищує вимоги за теоремою Шенона-Котельникова. Це відкриває нові можливості для покращення статистичних методів оцінювання як самих сигналів (змінних стану об'єкта), так і математичних моделей (ММ) їх взаємозв'язку у досліджуємому об'єкті. Об'єктами параметричної ідентифікації, як приклад, можуть бути в летальних апаратах (ЛА) залежності сил і моментів від змінних стану ММ ЛА; у технологічних, електротехнічних, економічних та інших об'єктах залежність показника якості $y(t)$ від факторів $x_i(t)$. Останні можуть довільно змінюватись у часі t чи за відповідним алгоритмом планування активного експерименту. Визначення ММ $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, наприклад, лінійної ММ

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i(t), \quad (1)$$

а саме оцінок $\hat{\beta}_i$ коефіцієнтів β_i , є предметом параметричної ідентифікації. Логічно вважати оптимальними оцінками β_i^* такі, за яких досягається мінімум середньо-квадратичної похибки $\varepsilon(t)$, за умови точних значень $y^*(t)$, $x_i^*(t)$:

$$\beta^* = \left[(X^*)^T X^* \right]^{-1} (X^*)^T Y^*. \quad (2)$$

Реальна ситуація полягає у тому, що як $y(t)$, так і $x_i(t)$ вимірюються у дискретні моменти часу t_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ з шумами $N_y(t)$, $N_{x_i}(t)$. За досить великого Δt шуми будуть наближатися до «білого». Але при цьому суттєво зменшується вибірка даних з N точок. За меншого Δt кореляційна функція шумів буде відрізнятися від δ -функції Дірака. Однак, як правило, реальна ситуація така, що автокореляція шумів в $y(t)$ і $x_i(t)$ буде згасати набагато швидше, ніж автокореляція корисних сигналів $y^*(t)$ і $x_i^*(t)$. Це пояснюється природною інерційністю процесів $y^*(t)$ і $x_i^*(t)$ у реальному динамічному об'єкті.

Враховуючи цю закономірність було розроблено так званий «інтегрований МНК» (ІМНК) [216].

СУТНІСТЬ ІМНК

Ідеальною оцінкою вектора β^* регресійної залежності

$$Y^* = X^* \beta^* + \varepsilon^*, \quad (3)$$

де Y^* , X^* , ε^* - точні значення змінних виходу, стану і невязки відповідно, буде МНК-оцінка (2), отримана за умови

$$\beta^* = \arg \min (\varepsilon^*)^T \varepsilon^*. \quad (4)$$

В реальній ситуації

$$X = X^* + N_x, \quad Y = Y^* + N_y, \quad (5)$$

де за великих Δt шуми N_x, N_y наближаються до «білих», за малих Δt – кольорові. Але їх автокореляція згасає із зсувом τ значно швидше від автокореляції X^* і Y^* .

Якщо скористатися звичайним МНК (2), то (навіть для $N_x(t)$ - «білого» шуму) МНК-оцінка $\hat{\beta}$ за умов (5) буде зміщеною внаслідок збільшення діагональних членів матриці $X^T X$:

$$\Delta \hat{\beta} = \left[(X^*)^T X^* + \sigma_{x_i}^2 I \right]^{-1} (X^*)^T Y^* - \beta^*, \quad (6)$$

де $\sigma_{x_i}^2$ - дисперсія N_{x_i} .

З іншого боку, регулюючий за Тихоновим [215] доданок $\sigma_{x_i}^2 I$ зменшує розкид МНК-оцінок $\hat{\beta}$ [216]. У класичній постановці МНК-оцінювання, за якої $\sigma_{x_i}^2 = 0$, є тільки σ_y^2 , МНК-оцінка $\hat{\beta}$ буде не зміщеною, а для N_y - «білого шуму» коваріація МНК-оцінок складе

$$\text{cov} \hat{\beta} = \sigma_{N_y}^2 \left[(X^*)^T X^* \right]^{-1}. \quad (7)$$

Із зростанням $\sigma_{x_i}^2$ у (6), зміщення $\Delta \hat{\beta}$ прямує до β^* , а $\hat{\beta}$ та $\text{cov} \hat{\beta}$ до нуля. Це робить МНК-оцінювання у реальній ситуації некоректним.

Для реальної ситуації, де $x_i^*(k)$ є гладкі часові послідовності з кроком Δt , $k = \overline{1, M}$, а шуми мають швидко згасаючі автокореляції, доцільно замість функціонала $\varepsilon^T \varepsilon$ нев'язки в МНК застосовувати взважену ваговою функцією $\eta(l)$ суму автокореляцій

$$I_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{l=-m_{kp}}^{l=m_{kp}} \eta(m) \sum_{j=1}^M \varepsilon(j) \varepsilon(j+l), \quad (8)$$

$$\text{де } \eta(m) = (1 + |m|)^{\Theta} \left(1 - \cos\left|\pi m / m_{кр}\right|\right)^{\gamma}. \quad (9)$$

Фінітна функція(9), залежно від параметрів Θ і γ та критичного зсуву $m_{кр}$, за якого втрачається позитивна визначеність визначника матриці $\varepsilon^T(k)\varepsilon(k \pm m_{кр})$, приймає відповідні форми (Рис. 1).

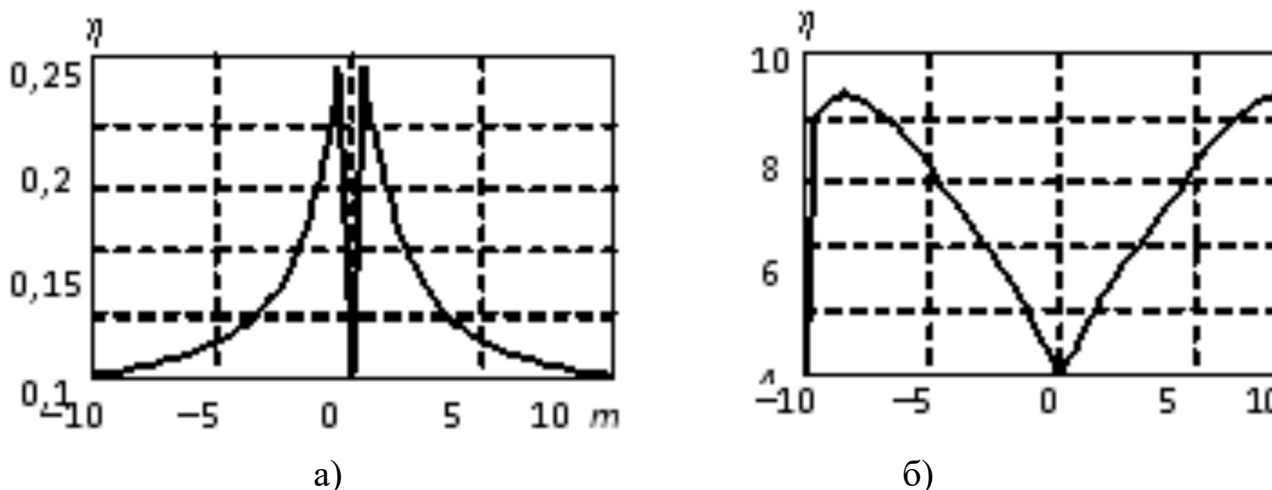


Рисунок 1. Залежність вагової функції $\eta(m)$ від параметрів Θ , γ , $m_{кр}$

Для N_{x_i} білого шуму кращою буде $\eta(m)$ на рис. 1,а, для кольорового – на рис. 1,б.

Детальний теоретичний аналіз ІМНК, як методу мінімізації показника (8), наведено у літературі [216].

Далі наведемо лише результати тестування МНК і ІМНК для ситуації шумів тільки в $y(t)$ і шумів в $y(t)$ і $x_i(t)$ моделі

$$y(k) = \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k), \quad (10)$$

де $k = \overline{1, 1000}$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$,

$$x_1(k) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} k \Delta t\right), \quad x_2(k) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} k \Delta t + \varphi\right), \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Шумами в $y(k)$ і $x_i(k)$ є випадкові числа з діапазону $[-215, 215]$ із рівномірним розподілом. Вагова функція $\eta(l, -2, 0.1)$ має вигляд, показаний на Рис. 2.

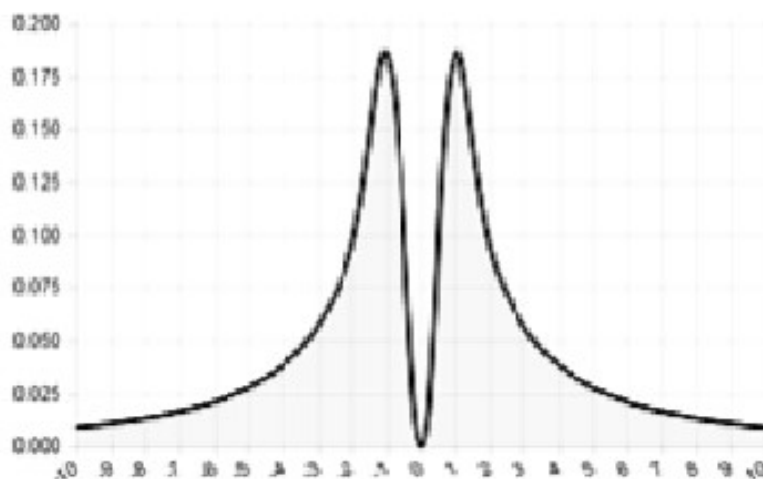


Рисунок 2. Графік вагової функції $\eta(l, -2, 0.1)$

В ІМНК в результаті мінімізації показника (8) з $\Theta = -2$, $\gamma = 0.1$ отримано досить точну модель

$$y(t) = 0.98x_1(t) + 1.05x_2(t), \quad (11)$$

В МНК при мінімізації показника $\varepsilon^T \varepsilon$ отримано модель

$$\hat{y}(t) = 0.76x_1(t) + 0.75x_2(t), \quad (12)$$

із суттєво заниженими коефіцієнтами.

Для випадку, коли $\eta(l, \Theta = -1, \gamma = 0.1)$ при мінімізації (8) отримано за тих саме шумів, майже точну модель

$$y(t) = 0.99x_1(t) + 1.007x_2(t). \quad (13)$$

Отже, якщо змінювати параметри Θ , γ вагової функції (9), можна підвищити точність ІМНК.

Для статистично об'єктивного оцінювання зміщення і розкиду оцінок відносно дійсних одиничних згенеруємо 10 статистично незалежних реалізацій шумів. Результати ідентифікації параметрів моделі (1) наведено у таблиці 1.

Таблиця 1.

Результати оцінювання за МНК та ІМНК

N	МНК		ІМНК	
	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
1	0,479	0,4981	1,0282	0,9094
2	0,4607	0,4493	1,0179	0,8844
3	0,4843	0,5663	1,0916	0,8435
4	0,5024	0,5401	1,0020	0,9290
5	0,5246	0,4659	1,0313	0,9798
6	0,4997	0,5058	1,2904	0,7437
7	0,4849	0,5255	0,7093	1,2307
8	0,4919	0,4431	0,8283	1,1910
9	0,46476	0,4856	1,0825	0,7197
10	0,4642	0,5015	0,9653	1,0112
β	0,4869	0,5082	1,0047	0,943
$\sigma_{\beta_i}^2$	0,00038	0,0026	0,0241	0,283
σ_{β_i}	0,0197	0,0541	0,1551	0,1682

Як бачимо, оцінки МНК суттєво занижені, в той час, коли їх розкид дещо менший, ніж в ІМНК.

Нарешті, якщо взяти класичну для МНК ситуацію, за якої «білі» шуми мають місце тільки в $y(t)$, а $x_i(t)$ - точні, то як показують результати тестування (таблиця 2), у випадку шумів тільки в $y(t)$,

Таблиця 2

Результати оцінювання у випадку шумів тільки в $y(t)$

	МНК		ІМНК	
N	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
1	0,9871	0,9212	0,9497	1,1019
2	1,0541	0,9371	1,0234	0,8554
3	0,9329	1,0817	0,9825	1,0818
4	1,1181	0,8819	1,0111	0,9132
5	0,9847	1,0192	1,1907	0,9807
6	1,0009	0,5058	1,1018	0,9823
7	1,1549	0,8258	1,0216	0,9879
8	0,9407	1,0765	1,0216	0,9879
9	0,9578	1,0523	0,9639	1,0881
10	1,0007	0,9432	1,0961	0,9946
β	1,0123	0,98	1,028	1,0089
$\sigma_{\beta_i}^2$	0,00055	0,0083	0,0027	0,0073
σ_{β_i}	0,0744	0,0911	0,0522	0,0854

метод ІМНК (внаслідок усереднення кореляції на $2m$ точках зсуву) дає точніші результати, ніж оптимальний для такої ситуації МНК.

Висновок: Використання ІМНК в багатократно адаптивних системах ідентифікації [218], де задача цілеспрямованої ідентифікації безпосередньо пов'язана з головною (для неї) задачею (керування, прогнозування, діагностики параметрів об'єкта) дозволяє оптимізувати параметри Θ і γ функції (9) по головному (зовнішньому [219] для задачі параметричного оцінювання) критерію.